Giuseppe Vaccarino (seconda parte)

2) ANTINOMIE ARITMETICHE E GEOMETRICHE

Le antinomie diventarono importanti per i matematici quando B.Russell sostenne che il concetto di fondo su cui è fondata la teoria degli insiemi infiniti, cioè quello dell'equivalenza del tutto con una parte (ad esempio, di tutti i numeri naturali con i pari, essendo ugualmente infiniti), porta alla antinomia che l'insieme infinito deve contenere ed anche non contenere se stesso come elemento. Tra i "tutti" deve esserci se stesso in quanto realtà ontologica. Avvalendoci della notazione insiemistica della classe delle "x" che hanno una proprietà "F", si definisce l'insieme "N" che non contiene se stesso come elemento con la formula:

$$\{\ x/\ \neg(x \in x\} = N$$

Uno specifico "a" appartenente a tale classe è:

$$(a \in N) \leftrightarrow a \in \{ x/(x \in x) \} \leftrightarrow \neg(a \in a)$$

Poiché "a" è qualsiasi, sebbene non specifico, deve poter essere anche lo stesso insieme "N", definito come non contenente se stesso.Sarà allora sostituendo "N"ad "a"

$$(N \in N) \leftrightarrow \neg(N \in N)$$

Cioè si ha l'antinomia che "N" appartiene e non appartiene a se stesso.
Frege venuto a conoscenza di questo risultato, si demoralizzò al punto di interrompere la sue ricerche sui fondamenti della matematica .

L'errore di fondo commesso dai matematici è ritenere che per gli insiemi infiniti si abbia l'equivalenza del tutto con una parte in quanto si pensa che ogni elemento del tutto sia in corrispondenza biunivoca con un elemento della parte. Ad esempio, il numero dei punti di una goccia d'acqua sarebbe uguale a quello dei punti del sole ,trattandosi in entrambi i casi di insiemi infiniti aventi la potenza del continuo. Poiché gli insiemi infiniti sono irriducibilmente metaforici possono essere gratificati di caratterizzazioni contraddittorie. Ovviamente per chi ha una mentalità scientifica l'"infinito", ad esempio, dei numeri, deve essere inteso nel senso che essi non si chiudono in un ultimo numero al di là del quale non può procedere, cioè nel senso che si può fare sempre qualche ulteriore aggiunta. In questo senso è da dire che l'infinito è potenziale, non già attuale.

Dico che si ha un'"antinomia cantoriana"tutte le volte che ci si contraddice considerando l'infinito come un processo aperto ("potenziale") che tuttavia si riconduce ad un'entità chiusa ("attuale"). La possibilità di poter sempre aggiungere un'unità, passando da "1"a"2"e quindi a "3", ecc.senza arresti, possibilità per la quale si dice impropriamente che i numeri sono infiniti, viene da Cantor scambiata con l"esistenza" dell'"infinito", inteso come un numero corrispondente a "tutti" i numeri naturali, cioè come un *numero transfinito,* per altro primo termine di una serie di infiniti transfiniti. Ma Cantor non può non ammettere che si possa sempre effettuare un'aggiunta a questo transfinito" (essendo un numero) , di ulteriori numeri. Perciò il transfinito è ed anche non è l'insieme di tutti i numeri. Si ha così un'antinomia, che chiamo "cantoriana" .

Nel campo dei numeri ordinali si ha l'*antinomia di Burali Forti,* che fu la prima ad essere evidenziata, ma non sollevò scalpore.Essa nasce ammettendo che per qualsiasi ordinale ne "esiste" sempre uno maggiore, ma affermando concomitantemente che il numero ordinale determinato dall'insieme di tutti i numeri ordinali è il maggiore.Precisamente qualsiasi numero ordinale "n" rappresenta l'insieme ben ordinato "<0,1,.....n-1>. Ad esempio, il "3" nel senso ordinale di "terzo"terzo corrisponde a "<0, 1, 2 >. Se "ω" è l'insieme ordinato di tutti i numeri ordinali, si deve contraddicendosi avere anche l'insieme "ω + 1".

Per i numeri cardinali si ha la parallela *antinomia di Cantor*. Essa nasce partendo dall'irriducibilmente metaforico insieme "m" di tutti gli insiemi. Il suo numero cardinale "Nm" sarà allora il maggiore che possa esistere. Ma Cantor dimostra un teorema per il quale se"Um" è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di "m", il suo numero cardinale deve essere maggiore di "Nm", che non è perciò il maggiore che possa esistere. Questo teorema è una generalizzazione del cosiddetto *secondo procedimento diagonale* con il quale Cantor ritiene di poter dimostrare che i "numeri reali" hanno un grado di infinità superiore a quello dei "numeri naturali", cioè la *potenza del continuo,* invece di quella del *numerabile".* Con il *primo procedimento diagonale* vuole invece dimostrare che i"numeri razionali" sono numerabili come i "naturali". La pretesa dimostrazione di Cantor è fatta per assurdo, cioè presupponendo la "esistenza" in ugual numero dei razionali e degli irrazionali e mostrando che si cade in una contraddizione. Ovviamente sostituendo analisi operative a queste pretese dimostrazioni fondate su irriducibilmente metaforiche realtà ontologiche, tutte queste considerazioni risultano prive di senso.

Il *teorema di Löwenhaim-Skolem* pone che i numeri reali in quanto"continui", cioè più "numerabili", sono non contraddittori, se non lo sono i numeri "razionali". Poiché i numeri razionali hanno per modello i numeri "naturali", essendo ottenuti con le operazioni di addizione, sottrazione e divisione fatte su di essi, si arrivò alla conclusione che basta dimostrare la non contraddittorietà dei numeri naturali perché si abbia la certezza che tutta la aritmetica sia non contraddittoria e con essa tutta la matematica in quanto la geometria viene collegata con l'aritmetica dalla geometria analitica.

Queste disquisizioni sono fondate sull'errore di non tenere presente che è impossibile parlare di "tutti" riferendosi ad infiniti elementi, dato che non possono essere mai tutti, in quanto a quelli ottenuti se ne possono aggiungere sempre altri. Dall'errore consegue che procedendo nell'elencazione dei pretesi elementi del "tutti" infinito è possibile porre una corrispondenza biunivoca tra ognuno di essi ed un parte di quei "tutti", ad esempio tra un numero della serie naturale ed uno della serie dei pari, essendo entrambe le serie infinite. Si ritiene perciò che per gli insiemi infiniti il tutto non sia più grande di una sua parte.Traviato dall'errore del raddoppio conoscitivo il matematico non si rende conto che non ha senso parlare di "tutti i numeri" o di "tutti i pari" o di "tutti i razionali", ecc. Il "tutti" può essere riferito a costituiti (ad esempio,tutti i numeri minori di 100) e non già a potenziali costituibili con un procedimento aperto. Ma l'ontologista, convinto invece di poter "conoscere" una "realtà" preesistente al suo operare, ritiene, per il fatto che può sempre procedere ad enumerare, che"esistano" già per conto loro "infiniti" numeri, disponibili a farsi conoscere. Di conseguenza ponendo una relazione biunivoca tra due serie aperte di enumerati, ad esempio, i numeri naturali ed i pari, cioè procedendo di conserva nell'aggiungere un termine alla volta per entrambe le serie, si deduce paradossalmente che esse confluiscono nello stesso infinito, cioè portano a classi ugualmente numerose.

Si commette parallelamente l'errore di concepire la corrispondenza biunivoca come antecedente alle cose in relazione .Anche nel caso di un certo numero (ovviamente finito) di esemplari non si può dedurre la ugual numericità della relazione, perché invece si può porre la relazione se ed in quanto si ha lo stesso numero di cose da fare corrispondere. Può accadere che non si sia fatto caso al numero di cose costituite e si controlli poi con il porle in relazione se sono state fatte in numero uguale o diverso; ma in tal modo in sostanza si enumerano nuovamente le cose che sono state fatte. I fabbricanti di antinomie invece invertono il procedimento operativo affermando che dalle relazioni ponibili tra i singoli esemplari di una classe di cose si deduce se essi corrispondono ad un certo numero o sono infiniti.

I matematici talvolta si sono resi conto che l'"infinito attuale" è irridicibilmente metaforico. Questo è il caso, ad esempio, di H. Poincaré. Ma nella maggior parte lo accettano. Nei *Principia Mathematica* Russell enuncia un esplicito *assioma dell'infinito.* Egli afferma che per quanto si proceda enumerando, si ottiene sempre un numero finito onde per passare al primo dei transfiniti di Cantor bisogna postulare l'infinito come una "realtà.".

I matematici parlano della retta e del segmento come di "punteggiate", considerandoli come costituiti da infiniti punti infinitesimi stipati accanto gli uni agli altri. Se si pongono in corrispondenza punti e numeri nel senso della geometria analitica, nasce quell'antinomia di tipo zenoniano che possiamo chiamare *antinomia di Dedekind.* Precisamente, indicando con il numero "1" l'inizio e con il numero "2" la fine di un segmento, in questo sarebbero contenuti infiniti punti in corrispondenza degli infiniti numeri reali compresi tra 1 e 2, Nella versione di Zenone dividendo sempre a metà il percorso che resta da percorrere (ad esempio, alla freccia), si avrebbero infinite frazioni corrispondenti ai decimali 0,2, 0,4, 0,8, ecc.. Secondo i nostri matematici , facendo riferimento ai numeri reali compresi tra 1 e 2, si avrebbero non solo infinite frazioni (numeri razionali), ma anche i pretesi "numeri irrazionali", tipo $\sqrt{2}$, aventi un grado più elevato di infinito ontologizzato, cioè si passerebbe dalla *potenza del numerabile* alla *potenza del continuo.* Ogni irrazionale sarebbe il limite di due serie convergenti di infinite frazioni, cioè di "numeri razionali". Si dice perciò che una "sezione"(*sezione di Dedekind*) nel campo dei numeri razionali determina un "numero reale", che sarà "razionale, se corrisponde ad una frazione di due numeri interi, "irrazionale se ha un denominatore con infiniti decimali. Connesso è il *teorema di Bolzano-Weierstrass,* considerato fondamentale dall'analisi tradizionale, secondo il quale ogni insieme infinito e limitato,come quello dei punti di un segmento, possiede almeno in punto limite (*punto di condensazione).*

A queste vedute è da obiettare che non è possibile attribuire ad un intervallo geometrico o aritmeticio una sorta di struttura atomica, ricondotta ad elementi finiti od infinitesimi, cioè nell'un caso di tipo discontinuo, nell'altro continuo. Infatti il segmento e la linea vengono costituiti con operazioni che non assumono affatto il "punto" come ingrediente. Gli "irrazionali" come pure i "razionali" sono irriducibilmente metaforici se fatti corrispondere a "numeri" intesi come entità costituite, perché invece si producono nella sfera consecutiva con le operazioni di estrazione di radice e di divisione. Le frazioni si possono ulteriormente categorizzare come *discontinue* se stabiliamo di fermarci ad un certo numero di decimali (ed in questo caso corrispondono alla divisione di due interi), *continue* se ammettiamo che tra due di esse se ne possono inserire sempre altre. Invece per l'ontologismo dei matematici si avrebbe un "discontinuo" tale per sua natura, cioè perché avente la *potenza del numerabile*, per la quale sussisterebbe una corrispondenza biunivoca con la serie dei numeri naturali. Il *continuo*, in cui sarebbero riempiti anche gli infiniti buchi rimasti tra gli ingredienti numerabili sarebbe in corrispondenza biunivoca con la serie dei numeri reali. Si aggiunge che i numeri interi, cioè naturali, presentano"intervalli" ma non "lacune"; i razionali presentano "lacune", ma non "intervalli", i numeri reali si fanno corrispondere ad un insieme"perfetto e denso".

Un caso in un certo senso intermedio tra le antinomie zenoniane e le cantoriane è quello in cui si avrebbe un accostamento progressivo ad un "risultato" e si considera come uguale al risultato stesso visto come "limite". Il procedimento comporta una regola per andare avanti e di solito si commette l'errore , di cui abbiamo già parlato, di considerare come nome del risultato (che non c'è) quello della regola (che c'è). L'esempio più semplice, ma tuttavia da considerare a parte perché in effetti manca anche un'effettiva convergenza,è quello dell'*enumerazione*, che si effettua aggiungendo un'unità alla volta.L'ontologista scambia questa regola con la convergenza ad una sorta di risultato limite, che considera come l'"infinito e che sarebbe il più piccolo dei "transfiniti"(corrispondente alla potenza del "numerabile"). Come detto, si ritiene di poter ottenere con procedimenti del genere numeri, in verità irriducibi lmente metaforici, come "e" (numero di Eulero).Mentre noi ci affatichiamo di determinarlo aggiungendo sempre ulteriori frazioni, esso "esisterebbe" per conto suo. Mediante serie , ma anche frazioni continue (anch'esse irriducibilmente metaforiche) si avrebbero anche gli altri trascendenti, come il non meno famoso "π".

Perciò, secondo l' ontologista, pretesi numeri come "e" e "π" riempirebbero gli infiniti buchi restanti tra il 2 ed il 3 nel primo caso , tra il 3 ed il 4 nel secondo dopo aver inserito non solo tutte le infinite frazioni ontologicamente esistenti (numeri"razionali"), ma anche tutte le possibili radici (numeri "irrazionali"). Quest'ulteriore aggiunta riguarderebbe sempre *numeri irrazionali*, ma non più algebrici (come $\sqrt{2}$), bensì *trascendenti* ,la cui presenza aggiuntiva trasformerebbe l'insieme dei numeri da "denso" a "continuo".

Dal punto di vista cantoriano chiudendo le illimitate aggiunte sempre aperte si avrebbe un numero come"e", dal punto di vista zenoniano si giungerebbe al numero "e" senza potervi giungere, perché le aggiunte non sono esauribili. Cioè si impianta una duplice antinomia. L'equivoco nasce dal fatto che possiamo dare un nome, ad esempio, alla serie di frazioni corrispondenti al numero "e", ma esso riguarda il modo di procedere comportante l'aggiunta sempre di una frazione determinata, metà della precedente. Questo modo di procedere è *aperto* per l'impegno operativo assunto e perciò non ha nulla a che fare con i passaggi *chiusi* , come quelli dei verbi per i quali è fissato il punto di arrivo. Il matematico invece adopera il nome, che può essere dato al procedimento aperto ,per una pretesa "realtà" ontologica del procedere stesso , "tutto" concluso ed in questo senso coincidente con un "risultato all' infinito". Ritiene perciò che un nome dato al procedere,come"e",denomini un certo numero con infiniti decimali.

Per sfuggire all'ontologismo potrebbe essere opportuno parlare, ad esempio, invece che di un numero "e", il quale fa pensare all'ente già fatto, ad un verbo come "*eizzare*".

3) ANTINOMIE PER CONFUSIONE DEI LIVELLI DI SUBORDINAZIONE.

Abbiamo accennato alle antinomie che nascono dalla *confusione dei due livelli di subordinazione*. I procedimenti deduttivi-dimostrativi sono fondati sulla subordinazione, la quale comporta due livelli linguistici tali che il secondo, cioè il subordinato, dipenda dal primo. Si tratta di relazioni consecutive di solito collegate con l'uso delle *congiunzioni* dette *subordinanti* per distinguerle dalle coordinanti. Ma secondo la mia semantica si ha anche il *subordinatore implicito* SU, corrispondente alla formula:

(SB)5 = SB/soggetto/ xg --sub-┼ (OB)4 =sxOB /oggettivo/

che non corrisponde ad un esplicito contrassegno linguistico, ma viene costituito ed applicato mentalmente, ad esempio, quando si parla di qualcuno A che dice qualcosa B (subordinato all'agire del parlante),

Tenendo presente questa subordinazione non può nascere il *paradosso del bugiardo* (cfr. pag, 11) nè altri analoghi. Infatti il parlante "Epimenide", in quanto parlante non può essere cercato tra i cretesi di cui parla, definendoli "mentitori".

Le antinomie di questo genere non sono solo semantiche, cioè non dipendono solo da un "dire" esplicito od implicito. Si hanno tutte le volte che un "agire"è subordinato ad un altro. Questo è il caso, ad esempio, dell'*antinomia del barbiere* del reggimento al quale il capitano aveva comandato di fare la barba ai soldati, ma solo a quelli che non se la sapevano fare da sé ed egli non era in grado di decidere se farla o meno a se stesso. Non si ha alcuna antinomia: il barbiere che sa farsi la barba non deve essere annovarato tra coloro che sanno farla a se stessi, perché sia che debba fare o non debba fare la barba, la sua funzione è sempre subordinata secondo gli schemi:

coloro che sanno fare la barba a se stessi	--sub--┤	il barbiere non deve fare loro la barba
coloro che non sanno fare la barba a se stessi	--sub--|	il barbiere deve fare loro la barba

In nessun caso il barbiere si trova nella proposizione principale e perciò non gli si deve porre il problema se deve fare o meno la barba a se stesso per ubbidire all'ordine. Il suo è un agire subordinato, perciò non determinante il suo stesso comportamento.

Anche le *antinomie dell'uso obliquo* (dette anche dell'"individualità", della "modalità", della "relazione nominale", ecc.), discusse soprattutto da W.V. Quine, provengono dalla confusione dei due livelli della subordinazione. Si premette che deve essere distinto l'*uso designativo* da quello *obliquo*, che si ha quando qualcuno afferma, crede, ecc. od anche quando interviene una modalità. Per l'uso designativo vale il *principio della scambiabilità*, secondo il quale, se "A" e "B" sono nomi uguali, possono essere sostituiti reciprocamente in una proposizione senza che cambi il suo valore di verità o falsità. Si hanno invece antinomie quando tale principio si applica nel caso dell'uso obliquo, dato che si ha una subordinazione. Ad esempio, Quine propone la seguente antinomia: a) Filippo crede che Tegucicalpa sia nel Nicaraqua; b) Tegucicalpa è la capitale dell'Honduras; c) Filippo crede che la capitale dell'Honduras sia nel Nicaraqua.

4) ANTINOMIE PER LA CONFUSIONE DELLA MENZIONE CON L'USO

B. Russell propose l'*antinomia dell'impredicabile* per meglio chiarire quella dell'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi. Ma a mio avviso essa ha una diversa origine. Egli definisce *predicabile* un concetto che possiede le proprietà che esprime, *impredicabile* uno che non le possiede. Ad esempio, "concetto" è predicabile perché, a suo avviso è un concetto, mentre "rosso" è impredicabile perché i concetti non sono colorati. Ciò premesso, se ci si riferisce al concetto *impredicabile*, esso dovrebbe essere, per il principio del terzo escluso, predicabile od impredicabile. Ma se fosse predicabile verrebbe a godere della proprietà che esprime e perciò diventerebbe impredicabile, se fosse impredicabile verrebbe a godere della proprietà che esprime con la conseguenza di diventare predicabile.

A parte il pregiudizio ontologico che esistano entità per loro natura concetti ed entità che non lo sono, mi pare che l'antinomia nasca in definitiva perché viene confusa la menzione con l'uso. Parlando nella *metalingua*, coincidente con la lingua corrente, introduciamo nella *lingua*, scrivendoli tra virgolette, i termini "predicabile" ed "impredicabile" con frasi tipo:

"predicabile" è un concetto che possiede le proprietà che esprime;

"impredicabile" è un concetto che non possiede le proprietà che esprime,

Si tratta di una menziome, ad esempio, di "impredicabile", volta a definire il significato del simbolo evidenziato tra virgolette. Una volta introdotti i due termini, possiamo usarli dicendo, ad esempio:

"concetto è predicabile"   "rosso è impredicabile"

Usiamo ancora i due termini dicendo:

"impredicabile è impredicabile"   "impredicabile è predicabile"

Nel primo caso esemplifichiamo il principio di identità, nel secondo quello di contraddizione.Non nasce alcuna antinomia perché semplicemente usiamo la parola "impredicabile" in modo non conforme all'impegno semantico assunto nei suoi riguardi. Se invece effettuiamo le menzioni:

""impredicabile" è impredicabile"   ""impredicabile" è predicabile"

menzioniamo il simbolo (tra virgolette) non per definirlo, ma per indicare che lo consideriamo tale rispetto al significato corrispondente alla stessa parola usata come predicato. Non possiamo dire che, in virtù della definizione di partenza, diviene "predicabile", in quanto possiede la proprietà che esprime, perché il significato è usato nella metalingua, il simbolo (tra virgolette) è menzionato nella metalingua per essere usato nella lingua, cioè si ha la *differenza tra il livello linguistico ed il metalinguistico.* Se i due livelli vengono confusi si ha l'*antinomia menzione-uso*. Nella metalingua menzioniamo il simbolo: 1) per definirlo rispetto ai significati delle altre parole usate; 2) per porlo a confronto con il suo significato;ma in ogni caso non possiamo confondere i due livelli, considerando il significato come qualificante il simbolo, come dovrebbe essere perché la qualità "impredicabile" renda il sostrato "impredicabile", a cui si attribuisce qualcosa che diviene predicabile.

L'*antinomia del bugiardo* può essere interpretata oltre che con la confusione dei due livelli di subordinazione anche come una confusione della menzione con l'uso. Appunto in questo senso fu interpretata da Łukasiewicz. Egli la pone nei termini seguenti : consideriamo l'affermazione " la proposizione a p. 13, righe 5-6 si questo libro non è vera", Se la indichiamo con "S" sarà: "S è vera se e solo se la proposizione di pag. 13, righe 5-6 di questo libro non è vera. Ma controllando il numero della pagina e le righe si trova che"S" è identica con la *proposizione a pag.13 righe 5-6 di questo libro.* Si perviene dunque alla contraddizione ""S" è vera se e solo se "S" non è vera";

Jourdan propone di ricondurre l'antinomia del bugiardo ad un cartello sul quale sia scritto: "dall'altra parte del cartello c'è un'affermazione vera" e sul retro invece: "dall'altra parte del cartello c'è un'affermazione falsa.

Un altro esempio è quello dell'*antinomia di Grelling* (detta anche *di Weyl)*, fondata sulla parola *"eterologico".* Si dice che un aggettivo è autologico se si applica a se stesso. Ad esempio, sono tali "italiano" e "polisillabico", essendo il primo una parola italiana, il secondo una parola composta da più sillabe. Si dice invece che è eterologico se non si applica a se stesso. Ciò premesso, risulta che per l'aggettivo "eterologico" non si può decidere se sia o non sia tale. Anche in questo caso si effettua la confusione del livello metalinguistico in cui la parola si usa con quello linguistico per il quale si menziona.

L'ontologista vorrebbe "concetti" per loro virtù esistenti, a cui facciano riferimento sia la lingua che la metalingua, con la conseguenza che il significato ed il simbolo sarebbero interscambiabili. Antinomie del genere si prospettano perciò quando si introduce il cosiddetto "autoriferimento", comportante, tra l'altro, il preteso uso *autonimo* dei così detti "simboli sintattici".

Non bisogna confondere i due livelli della subordinazione con quelli della lingua-metalingua. Poiché la subordinazione è spesso dichiarativa nel senso che la proposizione principale si riferisce a qualcuno che "dice", "pensa", "crede", ecc. e la subordinata a ciò che è detto, pensato, creduto, ecc., spesso si ritiene che si sia in una situazione analoga a quella del rapporto tra il parlante metalinguistico e ciò che è detto nella lingua, come accade quando, ad esempio, vengono proposti i rapporti semantici. Si ha invece che il parlante metalinguistico adopera solo strumentalmente la lingua con cui parla e quando si riferisce alla "lingua", per così dire, "esce" dalla metalingua proponendo, ad esempio, un simbolo, il quale perciò viene menzionato e non già usato. Questo è il caso in cui si traduce da una lingua straniera, ma anche quello in cui si propone una lingua i cui significati siano ricondotti ad operazioni , ad esempio mentali, indipendentemente analizzate, come faccio con la mia semantica.

Mentre nella subordinazione i due livelli vengono fissati, quello linguico e quello metalinguistico sono provvisori, nel senso che provengono dall'impiego di simboli diversi per lo stesso simbolizzato o da simboli nell'un caso menzionati e nell'altro usati. Alla fine perciò la metalingua potrà essere assorbita dalla lingua, ad esempio, da chi avrà imparato perfettamente una lingua straniera o ha svolto un 'analisi operativa esauriente delle parole della lingua corrente.Non occorrerà allora menzionare simboli per dire quali sono i simbolizzati corrispondenti. Altra caratteristica distintiva è che i due livelli della subordinazione sono asimmetrici, mentre quelli del rapporto lingua-metalingua sono simmetrici. Si può partire, ad esempio, dall'uso dell'italiano per menzionare l'inglese, ma anche viceversa. Il fatto che l'uso determina una menzione e la menzione un uso, è legato con l'equivalenza che pone in relazione consecutiva simbolo e simbolizzato, ma ciò non vuol dire che il simbolo possa esser scambiato con il simbolizzato e viceversa, perché appartengono ai due diversi livelli della menzione e dell'uso. Se questi livelli vengono confusi si può cadere in antinomie. Accade, ad esempio, che la parola "impredicabile" usata nella metalingua si consideri un aggettivo menzionato nella metalingua. Possiamo perciò dire che le *virgolette* evidenzianti una menzione impediscono la *costituzione* della correlazione dei termini menzionati con altri invece usati. Le relazioni che possiamo porre in casi del genere sono invece *consecutive*. Ad esempio, con ""impredicabile" è impredicabile" si indica la relazione consecutiva all'aver assunto un impegno semantico. Se scrivessimo invece: "impredicabile è impredicabile"si indicherebbe la rete correlazionale costitutiva di un predicato nominale. Possiamo perciò aggiungere che le antinomie nascenti per confusione di un uso con una menzione portano anche alla confusione di una correlazione con una relazione.

Analogo errore può essere commesso riferendosi invece che ad una sola parola isolata ad una frase definitoria. Siamo in questo caso con l'*antinomia di Richard*. Si parte dal presupposto che i numeri reali possono essere indicati invece che con gli usuali idegrammi, mediante successioni di lettere costituenti frasi come "π è il rapporto tra la circonferenza ed il diametro di un cerchio". L'antinomia viene costruita dicendo anzitutto di prendere le lettere di una lingua come l'italiana e disporle in ordine alfabetico prima a due a due, dopo a tre a tre, a quattro e quattro, ecc. Si tratta tecnicamente di "disposizioni con ripetizioni", nel senso che la stessa lettera può intervenire più volte. Si aggiunge che con tale procedimento ci si rivolge alle cose che possono essere descritte con un numero finito di parole, riconducendole ad espressioni di una lingua come l'italiana. Tali espressioni sono non solo costruite in base alle disposizioni delle lettere, ma anche ordinate con un criterio che è quello del vocabolario. Si prescrive dopo di limitarsi a considerare le frasi che definiscono numeri reali nel senso detto sopra, cancellando le altre.Si ritiene in tal modo di potere, almeno in linea di principio,ricondurli a frasi costituite da un numero finito di parole ed ordinate secondo un criterio. Cioè si avrebbe un procedimento per costruire un insieme numerabile comprendente tutti i numeri che possono essere costruiti con un numero finito di parole.

E' da sottolineare l'equivoco che si parla di "costruzione" dei numeri senza considerare affatto le loro operazioni costitutive. Sarebbe come dire che si cercano in un elenco telefonico i nomi susseguentisi in ordine alfabetico per fare la conoscenza delle persone a cui sono riferiti. Si dedurrebbe allora che le persone che già conoscevamo non le conoscevamo perché non le avevamo fatte corrispondere con nomi dell'elenco, ma le persone che non conoscevamo le conoscevamo per poterle riscontrare nell'elenco telefonico come conosciute.Si ha sempre la confusione della menzione con l'uso, ma in aggiunta non si menziona un effettivo simbolizzato, perché le frase è usata in modo irriducibilmente metaforico. Nel caso dell'elenco telefonico i nomi delle persone che conosciamo designano il simbolizzato "conosciuto" non per essere nell'elenco, ma per altri motivi.Analogamente nell'elenco di Richard. le frasi non corrispondono alla costituzione di numeri.

Lo scopo perseguito è una critica delle sane vedute di E. Borel, secondo le quali la matematica deve essere appunto "costruibile" e quindi non si può parlare di insiemi "densi" e "continui". L'antinomia di Richard ,confondendo la costruzione mentale dei numeri con combinatorie di parole associate in frasi in cui intervengono le loro denominazioni, porterebbe ad una critica di tali vedute, mostrando che a "tutti" i numeri costruibili se ne può aggiungere un altro, cadendo così in una palese contraddizione. Non si capisce insomma che i numeri non vengono costruiti con il procedimento di Richard e che in quanto essi sono "costruiti", non ha senso parlare di "tutti" i numeri,riferendosi anche a quelli non costruiti. Del resto lo stesso Richard si rende conto che introduce una contraddizione, ma presume che sia apparente.

L'antinomia di Richard si connette con il *metodo dell'aritmetizzazione* di K. Goedel riconducendolo ad una forma semplificata.Consideriamo le espressioni da ottenersi come detto sopra (che si riferiscono a proprietà di interi), disposte in una sequenza numerabile:" $e_1\, e_2\, \ldots . e_n$-----". In essi "una e_i precede una e_j " se il numero di lettere costituenti"e_i " è inferiore o si abbia una precedenza nell'ordine lessicale nel caso in cui sia uguale a quelle di "e_j ". Per interi arbitrari "n" e "p" deve aversi uno dei due casi: 1) "n" possiede la proprietà espressa da una "e_p ", cioè " $\vdash e_p\ (n)$"; 2) "n" non possiede la proprietà, cioè; "$\neg\vdash e_p\ (n)$.

Vengono chiamati "numeri richardiani" gli "n" del caso 2), quelli cioè che non posseggono la proprietà definita dall'espressione correlata. Se ad esempio, al quindicesimo posto nell'elenco troviamo la frase " e_{15} = essere il prodotto di un numero per se stesso" (definitoria del "quadrato"), si ha che il numero 15 non è richardiano, non essendo un quadrato. Se ci riferiamo ora alla proprietà dei numeri di "essere richardiani" nascerebbe l'antinomia in quanto da una parte la frase definitoria è inseribile anch'essa nella serie ordinata, ma si ha dall'altra parte che il numero "n" è richardiano se non possiede la proprietà definita dalla frase correlata.Cioè si dovrebbe ammettere che un numero è richardiano se non è richardiano. Precisamente si dovrebbe considerare la proprietà di un "n" tale che "$\neg\!\vdash e_n\ (n)$". Essa deve coincidere con una delle proprietà "e_i " elencate, dato che esse compendiano "tutte" le proprietà dei numeri costruibili. Sia allora un "q" tale che per ogni "n" si abbia l'equivalenza tra " $e_q\ (n)$" e $\neg\vdash e_n\ (n)$". Prendendo allora "n = q" si ha l'antinomia di Richard:

$$\vdash e_q\ (q) \quad \text{equivale a} \quad \neg \vdash e_q\ (q)$$

Richard presentò il suo paradosso in due forme diverse, rispettivamente nel 1905 e nel 1907. Nella versione originaria argomentava. 1) si pongano in ordine crescente i numeri ottenuti con un numero finito di parole; 2) sia "N" il primo numero che non rientra nell''insieme finito dei numeri ottenuti. Esso sarà perciò esterno all'insieme; 3) il numero "N" tuttavia appartiene all'insieme perché si può appunto definire come "il primo dei numeri che non rientra nell'insieme usando un numero finito di parole".come presupposto. Se una frase del genere avesse effettivamente un senso matematico, non credo si potrebbe sostenere che la matematica sia una scienza.

Collegata è l'*antinomia di Berry*. Si suppone dato un vocabolario contenente un numero finito di parole. Consideriamo le frasi costruibili con un massimo di 50 parole di tale vocabolario, che saranno di numero finito. Consideriamo l'insieme "C" delle frasi di questo tipo che definiscono un numero naturale. Tale insieme sarà ovviamente anch'esso finito e finito sarà anche l'insieme "N" dei numeri naturali definibili mediante una frase di "C". Chiamiamo *numero di Berry* il più piccolo dei numeri naturali così definiti (ammettendo che si tratti di un procedimento definitorio di numeri, mentre così non è). Ciò premesso, si consideri la frase: "numero di Berry è il più piccolo numero naturale *non definibile* mediante una frase contenente non più di 50 parole del vocabolario".Questa frase contiene 22 parole e poiché costituisce la definizione di un numero, appartiene all'insieme "C". Si ha allora la contraddizione che il numero di Berry appartiene e non appartiene all'insieme "N". Si tratta sempre di sofismi conseguenti dall'ignorare che per definire un numero bisogna solo individuare le operazioni mentali con cui si costruisce il suo significato come del resto è per i significati di tutte le parole.

5) LA TEORIA DEI TIPI RAMIFICATI

B. Russell, adeguandosi alla concezione, errata secondo la mia semantica , che il pensiero sia da ricondurre a giudizi tipo " A è B", sia pure riformulato interpretandolo come una funzione proposizionale "Fx", propose una *teoria dei tipi logici* secondo la quale per evitare le antinomie bisogna porre la limitazione che il predicato debba essere di un "tipo" superiore a quello del soggetto. In sostanza si tratta di delimitare la *regola della sostituzione*, nel senso che in una formula "Fx" si può sostituire il predicato "F" con un altro predicato "G", la variabile "x" con un'altra variabile "y",ma non la "x" con una variabile del tipo "F", in quanto le "F", "G", ecc. sono di un tipo logico superiore di quello delle "x", "y, ecc.

Nel 1903 Russell propose una *teoria dei tipi semplici,* che successivamente (1908) sostituì con quella dei *tipi ramificati*, la quale si trova anche nei *Principia Mathematica*. Nel 1926 F.P. Ramsey ripropose una teoria dei tipi semplici, avente lo scopo di eliminare solo i *paradossi logici*. L'originaria teoria dei tipi semplici di Russell era alquanto più complicata perché si occupava non solo delle classi e delle funzioni proposizionali, ma anche delle *relazioni* nel senso che prescriveva per esse di dover essere di un tipo più alto di quello dei *relata*. Inoltre conteneva altre affermazioni, in sostanza superflue, come quella che la somma di due tipi è sempre un tipo, che c'è un tipo contenente tutte le entità, ecc.

Notiamo che una regola volta a fissare i possibili predicati di un soggetto è implicita già nella dialettica di Platone e nella logica di Aristotele che introdussero la gerarchia specie-genere. Ad esempio, Aristotele prescrive che nella conclusione di un sillogismo il termine minore deve essere sempre soggetto ed il maggiore predicato, cioè il predicato deve essere do un "tipo" superiore al soggetto.

Russell intende la gerarchia dei "tipi logici" nel senso che una collezione di oggetti non può contenere membri definiti unicamente mediante la collezione stessa presa come un tutto. In questo senso deve essere considerata priva di significato ogni affermazione fatta su "tutti i membri". Ad esempio, non si può parlare di tutti i numeri come di un numero, di tutte le classi come di una classe. Riconducendo le classi e le relazioni a funzioni proposizionali, la regola dei tipi afferma che qualunque funzione di una variabile apparente, cioè non legata da quantificatori, non può essere un possibile valore della variabile stessa. In particolare non è possibile l'autoriferimento o riflessività. Il concetto di Russell è che una funzione proposizionale"Fx" denota ambiguamente le proposizioni "Fa", "Fb", ecc. che sono i suoi valori. Essa sarà ben definita se tali suoi valori sono ben definiti. Perciò non può avere tra i suoi valori qualcosa che presupponga la stessa funzione: altrimenti si cadrebbe in un circolo vizioso. Dobbiamo tenere presente che i valori della funzione sono presupposti alla funzione e non viceversa. Perciò la variabile (ad esempio, "x") deve essere di un tipo inferiore al predicato (ad esempio,"F"). Ciò vuol dire che "Fx" è una funzione proposizionale che può avere come valore una proposizione "Fa", ma non un'espressione come "F (Fx)" o meglio "F($\forall$x Fx)", in cui il segno "$\forall$x" è il *quantificatore universale,* significante " per tutte le "x"" . Tale formula è priva di senso perché la stessa "Fx"non si può rendere argomento o soggetto del predicato "F".

Lo stesso è se invece della "Fx" si rende soggetto qualsiasi altra funzione "Gx" di una variabile individuale "x", cioè sarebbe priva di senso "F (∀x Gx)".

A Russell premeva impedire con la sua regola dei tipi che si potesse attribuire "realtà" ontologica alla classe di tutte le classi non contenenti se stessa come elemento, la quale conduceva all'antinomia di cui abbiamo parlato. Affermando che è possibile solo l'appartenenza di un certo tipo ad uno superiore, risulta che nessuna classe può contenere o non contenere se stessa, come è senz'altro giusto già per la definizione di "classe". Essa è infatti tale per gli esemplari.

Secondo Russell la regola dei tipi elimina l'antinomia escludendo che sia possibile " a ∈ a" e quindi "N ∈ N", in quanto sono dello stesso tipo, Una notazione del genere per lui è priva di senso, cioè dal punto di vista logico-sintattico non sarebbe una f.b. f. ("formula ben formata"). Più in generale, un insieme non può essere né elemento né non elemento di se stesso, cioè nessuna totalità può concernere elementi definiti nei termini di essa medesima. Come dicevamo, per Russell le antinomie dipendono da un circolo vizioso, che viene impedito dalla regola dei tipi. Egli avverte però che, pur contravvenendo a tale regola, talvolta si hanno conclusioni vere di fatto, sebbene le argomentazioni siano fallaci, Cioè non si sfocia automaticamente ad antinomie palesi.

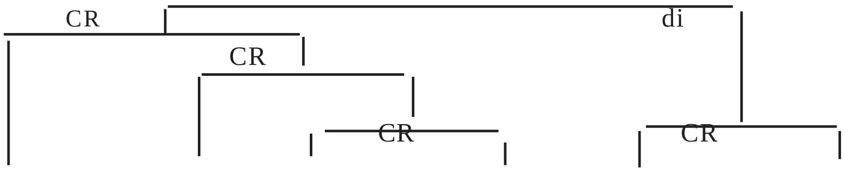
Russell ritiene che le limitazioni derivanti dal concetto di "tipo" consentono di evitare l'antinomia dell'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stesso e quindi di salvare la teoria degli insiemi infiniti, a suo avviso fondamento indispensabile della matematica. Con essa si evitano altre antinomie come quella di Burali Forti, ma non tutte. Ad esempio, persistono quelle del bugiardo del numero di Berry, ecc . Di conseguenza ritenne di dover ampliare il concetto di "tipo" formulando la *teoria dei tipi ramificati*, secondo la quale entro ogni "tipo" si ha la ulteriore distinzione in "ordini". In tal modo si propone di eliminare tutte le antinomie con un unico criterio, che in definitiva si può ricondurre alla eliminazione del circolo vizioso.

Egli parte da *funzioni elementari,* cioè funzioni proposizionali di individui "Fx", che chiama anche "*matrici*" perché da esse si generano espressioni con variabili legate. Per indicare che si rivolgono ad individui le contrassegna con un punto esclamativo,cioè le indica con la notazione "F!x". Tali funzioni elementari hanno come valori le proposizioni elementari tipo "Fa", che si ottengono sostituendo la "x" con una costante.Il concetto di Russell è che anche con tali funzioni elementari si possono formare delle totalità illegittime, cosicché anch'esse devono essere ricondotte ad una gerarchia, costituente degli "ordini" interni del primo "tipo". Se infatti consideriamo una funzione elementare di due individui "F!(x,y)" e tenendo fermo "x" ci riferiamo a tutti i valori di y" mediante un quantificatore universale (o ad alcuni con un quantificatore esistenziale) si ha l'espressione "∀ y F! (x, y)" in cui "y" è legata ed "x" è libera oppure la "∀x F! (x,y)" in cui viceversa "x" è legata ed "y" libera. Rivolgendoci, ad esempio, alla prima di queste espressioni, essa ha come valore proposizioni come "∀y F! (a,y)", che non sono più elementari, sebbene provengano dalla generalizzazione di funzioni elementari. Russell chiama tali funzioni provenienti dalle elementari come pure le stesse elementari. *funzioni del primo ordine*. Afferma che continuano ad essere del primo tipo perché in esse il soggetto è sempre un individuo e si quantifica solo la variabile individuale.Se poi ci si riferisce ad una funzione come "G!(F!z,x)", cioè delle due variabili "F!z" ,che è una funzione elementare , ed "x", che è una variabile individuale, si ha tenendo ferma la "x" e dando alla "F" tutti i possibili valori, introducendo un quantificatore universale: "∀F G!(F!z, x)".Essa è una funzione della variabile individuale "x" (perciò del primo tipo) che contiene però anche il riferimento alla totalità dei valori di "F!z", cioè ha come argomento una funzione elementare e non già semplicemente un individuo. Secondo Russell nascono così le *funzioni del secondo ordine*, ma sempre appartenenti al primo tipo, perché hanno come soggetto variabili individuali. Analogamente considera funzioni del secondo ordine quelle in cui si ha come variabile una pluralità di funzioni elementari. Ad esempio , è tale: "∀F ∀G H! (F!z, G!z, x)". Con lo stesso ragionamento si passa agli ordini superiori, che per Russell non sono infiniti, perché legati con il numero finito di variabili individuali a cui si fa riferimento.

La distinzione delle funzioni in "ordini" permetterebbe di risolvere antinomie come quelle del bugiardo, del numero di Berry, ecc.,cioè quella che abbiamo ricondotto alla confusione dei due livelli della subordinazione o a quelli dell'uso-menzione. Ad esempio, l'antinomia del bugiardo nascerebbe perché vengono livellati l'individuo che parla (funzione elementare) e ciò che dice, cioè una funzione di ordine superiore. Il circolo vizioso si eviterebbe tenendo presente che ogni volta che si origina un nuovo termine con frasi intorno a "tutti" od "alcuni" i valori che una variabile individuale può assumere, il nuovo termine non deve essere uno dei possibili valori della variabile originaria.

A mio avviso antinomie del genere si eliminano tenendo separati i due velli della subordinazione o dell'uso-menzione, mentre quella cantoriane distinguendo la parte ed il tutto. Russell vorrebbe invece in tutti i casi eliminare un circolo vizioso, distinguendo i "tipi" ed entro di questi gli "ordini". Inoltre a mio avviso la differenza di livello che si ha nella subordinazione è sintattica, cioè deriva dall'intervento di correlatori subordinanti come l'implicito "SU" e non già da caratteristiche costitutive dei correlati. Cioè nessuna cosa è per sua natura "individuo", "proprietà" e tanto meno "proprietà di proprietà", ecc. Non vi sono differenze di *ordine* tra i predicati ma le antinomie nascono confondendo le differenze di livello di cui sopra. Si direbbe che Russell abbia avuto l'intuizione che, per evitare certe antinomie, si debbano appunto tenere presente i diversi livelli, ma guidato da esigenze ontologiche, parla di una gerarchia di "tipi" (non due, ma infiniti), determinati dai contenuti. A suo avviso si avrebbero entità per loro natura "individui", "classi", "classi di classi", ecc. Ma egli sentì dopo il bisogno degli "ordini" per sottolineare effettivamente le differenze di livello nel caso di quelle antinomie che nascono trascurandole. Si ha così che i "tipi" finiscono per perdere interesse operativo mentre l'acquistano gli "ordini". Possiamo aggiungere che mentre con i "tipi" Russell propone una metaforizzazione irriducibile delle "classi di classi" o dei "predicati di predicati", con gli "ordini" introduce quella delle "proprietà di proprietà". Poincaré afferma che le "proprietà di proprietà" devono essere soppresse perché sono *definizioni impredicative*, che si rivolgono a proprietà invece che ad individui, cadendo in un circolo vizioso. Russell invece finisce per accettare le definizioni impredicative a condizione che vengano disciplinate dalla regola degli "ordini". Ad esempio, si sarebbe in un caso del genere dicendo: "Napoleone ebbe tutte le qualità di un grande generale". frase che per Russell è da ricondurre ad una funzione del primo tipo, ma del secondo ordine. Infatti a Napoleone viene attribuito in modo non predicativo di avere come "qualità" l'agglomerato di qualità caratterizzanti un grande generale, viste come una totalità. Il pregiudizio ontologico fa stranamente pensare che nella "realtà" siano depositate "tutte le qualità caratteristiche dei grandi generali" come qualità di individui e quindi da essere intese come *funzioni predicative*. Quando esse vengono considerate "tutte" per attribuirle a Napoleone, diventerebbero del secondo ordine, cioè in un certo senso due volte proprietà, una perché lo sono per la loro natura ontologica, un'altra perché attribuite a Napoleone come un'entità unitaria, cioè in modo impredicativo. Per Russell così procedendo si contravviene alla regola degli ordini, perché bisognerebbe elencare le "qualità" definite per non includere tra di esse quella di "avere tutte le qualità di....".

Non credo che in casi come quelli corrispondenti a quest'esempio si abbiano effettivamente difficoltà. Le antinomie non nascono per la mancata distinzione degli ordini" di Russell. Nell'esempio il "tutte" non comporta alcuna difficoltà perché è nient'altro che un aggettivo di "qualità". La frase è perfettamente legittima perché non comporta alcuna subordinazione od alcuna relazione consecutiva tra il livello linguistico ed il metalinguistico. Si ha infatti un pensiero semplice, espresso da una sola proposizione, da essere ricondotta alla rete correlazionale seguente in cui interviene 4 volte il *correlatore implicito* "CR" ed una volta la preposizione "di":



Napoleone ebbe (le) -qualità tutte un- generale grande

La preposizione"di" correla la rete delle prime tre correlazioni implicite "CR" con la quarta.

Russell era preoccupato del fatto che la teoria dei tipi ramificati sembrava invalidare fondamentali concezioni della matematica ufficiale, come quella delle sezioni di Dedekind e quindi la corrente teoria dei numeri reali. Non solo non si potrebbe dire che "Napoleone ebbe tutte le qualità di un grande generale" (in contraddizione con l'opinione corrente), ma neanche che un insieme di numeri reali è un insieme di insiemi di numeri razionali ed irrazionali , in quanto successioni convergenti ognuna in un'entità mediante una definizione impredicativa. Egli ritenne di poter aggirare la difficoltà introducendo l' *assioma della riducibilità*, secondo il quale per qualsiasi funzione proposizionale "Fx" esiste sempre una corrispondente funzione predicativa "$\Phi! x$", cioè la seguente funzione inerente ad individui nella quale interviene il quantificatore esistenziale:

$$\exists \Phi (Fx \leftrightarrow \Phi ! x)$$

Si avrebbe perciò che tutte le funzioni impredicative si possono spezzare in altre predicative eliminando gli ambigui raggruppamenti intermedi. Frasi come "Napoleone ebbe tutte le qualità di un grande generale" diventerebbero legittime riconducendo il"tutte" ad un elenco delle varie qualità spettanti ai grandi generali, considerate ad una ad una, cioè come funzioni predicative di qualità individuali. In questo senso il quantificatore universale si riconduce ad una serie di copulative. Analogamente ogni funzione proposizionale di ordine superiore inerente ad un numero reale si muterebbe in funzioni predicative riferentisi ai numeri razionali. Nel caso dell'antinomia del bugiardo si richiederebbe che venga eliminata l'affermazione (funzione del secondo ordine) : "tutte le affermazioni di Epimenide sono false", sostituendola con le funzioni predicative che elencano le singole affermazioni false. Tra di esse non si troverebbe quella fatta da Epimenide. Pertanto, secondo Russell, si giustifica la ripartizione in "ordini" e si risolvono tutte le antinomie, semplicemente riconducendole a circoli viziosi.

L'assioma della riducibilità, che rende privilegiati gli "individui" come soggetti effettivi di tutti i predicati, induce Russell a ritenere che le "classi" siano illusorie, cioè corrispondenti a *simboli incompleti*. Ma egli vuole tuttavia mantenere indirettamente le "classi di classi", vedendole come fittizi aggruppamenti di individui. Nominalistiche o reali che siano,continuano ad essere adoperate da lui per definire i numeri cardinali, senza che si disponga di un qualche criterio per raggruppare gli "individui" nelle "classi" e quindi nelle "classi di classi" , ecc., cioè per ricondurre gli "ordini" ad effettive operazioni. Se fosse dato un criterio, in grado di differenziare gli individui raggruppati in una sottoclasse, si passerebbe alla logica aristotelica dei generi e delle specie. Russell rinuncia alla "realtà" ontologica delle classi, ma la surroga con quella degli individui. Considera appunto l'"individuo" non come una categoria mentale, in quanto tale applicabile o meno, ad esempio, a cose fisiche, ma una datità precostituita, nel senso che alcune cose sarebbero individui per loro natura ed altre no. Pertanto, quando una classe di individui appartiene ad un'altra, a suo avviso gli individui persistono raggruppati nella loro classe d'origine, costituendo un "ordine" che si trasferisce in blocco nella classe più ampia, restando in essa come sottoclasse. L'assioma della riducibilità attenuerebbe tale ontologizzazione affermando che in definitiva nella "realtà" si ha l'appartenenza degli individui alla classe globale. Gli"ordini" si riducono perciò ad essere semplici indicazioni linguistiche, Abbandonando il realismo delle classi ed ammettendo che "esistano" solo gli "individui" con le loro proprietà, Russell si accosta all'atomismo logico del primo Wittgenstein, ma aggiunge che il logicista è in grado di spaziare i tutti i leibniziani mondi possibili senza tuttavia perdere il contatto con la "realtà" appunto in virtù dell'assioma della riducibilità.

Sotto quest'assioma c'è forse adombrata l'intuizione che i livelli linguistici sono solo due. Russell considera quelli degli individui e delle funzioni predicative, vedendoli in senso ontologico. Invece,come abbiamo detto, bisogna considerare quelli sintattici delle proposizioni principale e subordinata e quelli dell'uso e della menzione dei termini, cioè dei livelli linguistico e metalinguistico.

6) LA TEORIA DEI TIPI SEMPLICI

La teoria dei tipi ramificati non riscosse molti consensi soprattutto per l'introduzione dell'assioma della riducibilità. Mentre, come dicevamo, esso potrebbe costituire un'apertura verso una soluzione di tipo operativo limitando i livelli linguistici a due, fu criticato notando che non è tautologico e quindi logico. Si deduceva perciò stranamente che deve essere considerato di contenuto empirico. Tuttavia una teoria dei tipi sembrava necessaria per fronteggiare le antinomie. Ci si trovava nell'alternativa di dover accettare il dubbio assioma della riducibilità oppure di rinunciare agli insiemi infiniti e quindi alla teoria dei numeri reali.

Per tentare il salvataggio di questa matematica ontologizzata F.P.Ramsey ed indipendentemente L.Chwistek proposero un ritorno ai *tipi semplici*, in modo da evitare la suddivisione in "ordini" ed il conseguente assioma della riducibilità. Questa semplificazione sembrò possibile in quanto concomitantemente veniva prospettata una distinzione delle antinomie in *logiche* e *semantiche*. Vennero considerate "logiche" quelle dell'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi, di Cantor,di Burali Forti e di tutte le altre collegate con termini logici o matematici come "classe", "numero",ecc. Vennero caratterizzate come "semantiche" l'antinomia del bugiardo, dell'eterologico, di Richard, ecc. perché collegate con l'uso di parole come "vero", "falso", "dico", "mento", ecc., onde si riferirebbero all'adeguazione di ciò che si dice con quanto esiste secondo la tradizionale semantica realista. Si diceva che le antinomie semantiche sono di tipo empirico-psicologico e quindi non riguardano la logica e la matematica. In queste disquisizioni grande assente è sempre l'analisi delle operazioni mentali e del pensiero.

Questa nuova teoria dei tipi semplici si limita ad accettare la gerarchia ontologica alla cui base vengono posti gli "individui" (tipo "0"), ai quali seguono i"predicati" o "proprietà" di individui (tipo "1"), i "predicati di predicati" o "proprietà di proprietà" (tipo "2"), ecc. Perciò indicando i tipi semplici con un indice numerico, sono considerate accettabili formule come "F^1x^0", "$F^1x^0y^0$", semplificabili nelle consuete "Fx"ed "Fxy", mentre sarebbero prive di senso formule come " $F^1(G^1)$" in cui il predicato"F" ed il soggetto "G" sono dello stesso tipo. Si aggiunge che per rendere variabile un predicato "F" rispetto ad un altro predicato, questo deve essere di tipo superiore. cioè si devono avere formule "$\forall G (F^2 G^1)$". Si otterrebbero così i predicati di predicati e quindi i predicati di predicati di predicati, ecc.In loro corrispondenza si avrebbero le classi di classi,classi di classi di classi, ecc. Vedute del genere sono inaccettabili ontologizzazioni: i predicati diventano infatti soggetti quando ad essi si riconducono altri predicati. Inoltre questi autori affermano che la gerarchia dei tipi prosegue fino al solito "infinito"e perciò si parla anche di un *calcolo dei predicati di ordine* ω, che comprende la teoria dei tipi (semplici).

Poiché si ritiene che la teoria dei tipi semplici sia in grado di eliminare le antinomie logiche ma non le semantiche, queste vengono abbandonate al loro destino. Si reputa che il danno sia scarso perché riguarderebbero solo problemi linguistici e non quelli dei fondamenti dell'altissima scienza matematica. La concezione operativa invece livella sul piano dei simbolizzati tutto ciò che si dice che, in quanto costituito è mentale, in quanto espresso è linguistico. Cioè linguistica è anche la matematica se ed in quanto passiamo dai simbolizzati mentali ai simboli con cui abbiano convenuto di designarli. Le due sfere del mentale e dell'espressione linguistica sono collegate dagli impegni semantici assunti e perciò non è possibile isolare aspetti peculiari di una che non trovino una corrispondenza nell'altra. Sotto questo profilo sbagliano i *significisti* (G. Mannoury, D. Van Dantzig) ritenendo che gli assunti della matematica, in partenza solo mentali, successivamente vengano influenzati dal mezzo di comunicazione, cosicché si associano alla schiera dei propugnatori di un linguaggio formale, dato che quello corrente non fornirebbe sufficienti garanzie. A loro avviso il "contare", quando i numeri sono più di sette (secondo alcuni già più di tre) non può essere separato dagli aspetti linguistici. Così dicendo non si rendono conto che al di sopra della strutturazione di sette momenti viene effettuato un riassunto, che però è mentale. E' da dedurre che in casi del genere intervenga una "memoria riassuntiva" da essere distinta dalla "strutturale".

Forse si può ammettere che poiché una teoria dei tipi ricondotta solo a due coincide con il riconoscimento dei due livelli della subordinazione e dei due dell'uso-menzione, giusto al contrario di come ritiene Ramsey, paradossi come quello del bugiardo possono essere risolti con essa. Le antinomie dette "logiche"sono invece quelle che abbiamo classificato come zenoniane e cantoriane, le quali provengono da errori di altro tipo, come la considerazione di un processo aperto come se fosse chiuso, di una parte come se fosse un tutto e viceversa.

Ricordiamo che l'introduzione della metalingua da parte di A.Tarsky aveva anche lo scopo di eliminare le antinomie semantiche nel senso che per rivolgersi al significato di un'espressione linguistica bisogna parlare di essa con una metalingua. Ma ciò va bene per antinomie come quella dell'"impredicabile" o dell'"eterologico", ma non per quella del "bugiardo". Infatti in quequesto caso livello del parlante non è quello metalinguistico, bensì quello della proposizione principale in una subordinazione. Inoltre non ritengo accettabile l'opinione di Tarsky che le lingue correnti siano particolarmente esposte a tali antinomie perché, per esse, lingua e metalingua coincidono lessicalmente. A suo avviso le lingue correnti dovrebbero essere sostituite da metalinguaggi formalizzati. A questo proposito si confondono di solito con simboli formali gli ideogrammi di contenuti. Nelle mie ricerche di semantica adopero come metalingua la corrente lingua (italiana). Parlando con essa definisco le operazioni mentali costitutive dei significato delle varie parole e correlazioni ed indico i risultati delle analisi con formule, in modo analogo a come fa la chimica. Queste formule però non sono formali perché semantizzano i significati, a loro volta costituiti da contenuti e da forme come quelle dei sostantivi, degli aggettivi, dei verbi, avverbi ecc. E' un grave errore commesso dai logicisti che si sono occupati di semantica considerare "formali" i segni ideografici assunti come simboli. al posto delle parole correnti.